Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचितः मानव धर्म प्रणेता

सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

अवकलन समीकरण (differential equation)

It is not certain that everything is uncertain.....Pascal, Blaise

परिभाषा (Introduction)

ऐसी समीकरण जिसमें स्वतंन्त्र चर, आ़ति चर एवं उनके अवकलत विद्यमान हो, अवकल समीकरण कहलाती है। अवकल समीकरण सामान्यतः दो प्रकार की होती है।

1.1 साधारण अवकल समीकरण
(Ordinary Differentoial Equation) : जिन अवकल समीकरणें में केवल एक ही स्वतंत्र चर के सापोक्ष एक या अधिक क्रके के अवकलजों का प्रयाग होता है वे सामाधर अवकल समीकरण कहलाती है।

डदाहरण $\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=y+z,$:

$\frac{dy}{dx}+xy=\sin x,$ $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{dy}{dx}+y=e^{x,}$

$$k\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2},\ y=x\frac{dy}{dx}+k\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$$

1.2 आंशिक अवकल समीकरण ;चंतजपंस कपमितमउजवंय मपुंजवचउद्ध : जिन अवकल समीकरणें में दो अथव ाअधिक स्वतंत्र चरो के सापेक्ष एक या अधिक क्रम के अवकजलो का प्रयोग होता है वे आंशिक अवकल समीकरण कहलाती है–

उदाहरण $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=ax,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

अवकल समीकरण की कोटि तथा घात
(Order and Degree pf a dofferemtoa; Eiatopm)%

2.1 **कोटि** (order) : अवकल समीकरण में विद्यमान उच्चतम अवकलो की कोटि ही उस समीकरण की कोटि कहलाती है।

2.2 घात (Degree) :
अवककल समीकरण को अवकलजो के सन्दर्भ में परिमेय तथा पूर्ण बीजीय बनाने के उपरोत उसमें उपस्थित उच्चतम अवकलज की घात को उस अवकल समीकरण ककी घात कहते है।

$$f_1(x,y)\left[\frac{d^m y}{dx^m}\right]^{n_1}+f2(x,y)\left[\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right]^{n_2}+.....f_k(x,y)\left[\frac{dy}{dx}\right]^{n_k}=0$$

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

उपरोक्त समीकरण की कोटि m तथा घात n_1 है।

अवकल समीकरणों का निर्माण (Formation of Differential Equation):

वक्र कुल से सम्बन्धित अवकल समीकरण में

(a) कोटि, वक्र के समीकरण में उपस्थित स्वेच्छ अचरो की संख्या के बराबर होती है

(b) कोई स्वेच्छ अचर शेष नहीं रहता ।

वक्र कुल से अवकल समीकरण बनाने के लिए निम्न पदों में कार्य करते है।

प्रथम पद

(a) वक्र के समीकरण में स्वेच्छे? अचरो की पहचान करते है।

नोटः यदि स्वेच्छ अचर समीकरण में योग, व्यकलन भाग या गुणनफल में होते उन्हे एक नये स्वेच्छ अचर से परिवर्तित कर देते हैं।

द्वितीय पद

(b) वक्र के समीकरण को तब तक अवकलीत करते है जब तक की अभिष्ट कोटि न मिल जाये।

तृतीय पद

(c) वक्र के समीकरण तथा पद 2 में प्राप्त समीकरण की सहायता से सभी स्वेच्छ अचरो को हटाकर अभिष्ट अवकल समीकरण प्राप्त करते है।

अवकल समीकरणें के हल (Solution of a differentoa; Eiatopn):

अवकल समीकरण के हल से अभिप्राय समीकरण में प्रयुक्त स्वतंत्र एवं आश्रित चरों में एक ऐसे सम्बन्ध से है। जिसमें कोई भी अवकलज गुणांक न हो तथा यह सम्बन्ध एंव इससे प्राप्त अवकल गुणांक दिये हुये अवकल समीकरण को सन्तुष्ट करे।

नोटः अवककल समीकरण का हल उसका पूर्वग (primitive) भी कहलाता है क्योंकि वह अवकल समीकरण उसी से उत्पन्न एक सम्बन्ध है।

अवकल समीकरण के हलो को तीन भागों में बाटा गया है–

(i) **व्यापक हल या पूर्ण हल (Grmrts; solutaion) (or complete intergral or complete primitive)** : अवकल समीकरण में यदि उसकी कोटि के बराबर स्वेच्छ अचर हो तो वह हल व्यापक हल कहलाता है। इसे पूर्ण हल, पूर्ण समाकल या पूर्णपूर्वग भी कहते है।

(ii)**विशिष्ट हल (Particular Solution)** व्यापक हल में प्रयुक्त अचरो को स्वेच्छ मान देने पर प्राप्त हल विशिष्ट हल कहलाते है।

(iii)**विचित्र हल (Singular Soluation)** : वे हल जो व्यापक हल में प्रयुक्त स्वेच्छ अचरो को विशिष्ट हल देने से प्राप्त नहीं होते विचित्र हल कहलाते हे।

4.1. प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण (Differential Euatio of First Order and First Degree)

एक प्रथम कोटि तथा प्रथम घात की अवकल समीकरण निम्न होती है।

$\frac{dy}{dx} + f(x,y) = 0$, जो निम्न प्रकार भी लिखि जा सकती है–

$M\,dx + N dy = 0$, जहां M तथा N, x व y के फलन है।

प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरणें के हलों के प्रकार (Elementary Types of First Order aned First Degree Differential Euations)

5.1 चरो का पृथक्करा (Varaiables seperable) %

अवकल समीकरण में प्रयुक्त चर x तथा y को अलग–अलग करके निम्न रूप में लाते है। $f(x)dx = \phi(y)dy$ .....(1)

यहां चर x तथा y पृथक–पृथक हो गये है अतः समीकरण (1) के प्रत्येक पद का अलग–अलग समाकरल करके हल प्राप्त कर लेते है। जो निम्न प्रकार का होता है। $\int f(x)dx = \int \phi(y)dy + c$ जहां c एक स्वेच्छ नियतांक है।

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

5.1.1 ध्रुवीय रूप मे परिवर्तन द्वारा :

कभी–कभी अवकल समीकरणों को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित करके भी हल करते है।

(a) यदि $x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta$ हो तो

(i) $xdx + ydy = rdr$ (ii) $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2d\theta^2$ (iii) $xdy - y\,dx = r^2d\theta$

(b) यदि $x = r\sec\theta$ और $y = r\tan\theta$ हो तो

(i) $x\,dx - y\,dy = r\,dr$ (ii) $x\,dy - y\,dx = r^2\sec\theta\,d\theta.$

5.1.2 चरो को पृथक्करण में बदली जाने वाली अवकल समीकरण।

(Equations Reducible to the Variables Separable form)

ऐसे समीकरण जिनमें प्रतिस्थान से चर राशियों को परिवर्तित करके अलग–अलग किया जा सके । उदाहरणतः समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)\ \ a,b \neq 0$ को हल करने के लिए $ax + by + c = t$ रखते है।

5.2 समघात अवकल समीकरण (Homogeneous Differential Euatins)

$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, जहां f तथा g; x व y के समघात फलन है, प्रकार की अवकल समीकरणें समघात अवकल समीकरणे कहलाती है इन्हें $y = vx$ रखकर हल रखते है।

5.2.1 समघात रूप में परिवर्तित होने वाली अवकल समीकरणे

(Equation Reducible to the Homigeneous form)

$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}$ प्रकार की समीकरणों को .....(1)

$x - X + h$ तथा $y + Y + K$ रखकर जहां h,k अचर व X,Y चर है निम्न रूप

$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + (ah + bk + c)}{AX + BY + (Ah + Bk + C)}$ में बदल सकते है .....(2)

अब h व k का चयन इस प्रकार करहते हैं कि $ah + bk + c - 0$, तथा $Ah + Bk + C - 0$; अब अवकल समीकरण को $Y = vX$ रखकर हल करते है।

महत्वपूर्ण स्थिति :

(A) यदि समीकरण (1) में $aB = Ab$ हो तो $ax + by = v$ रखने पर जो रूप मिलता है उसमें चर पृथक–पृथक होते हैं ।

(B) यदि समीकरण (1) में $b + A = 0$ तो साधारण व्रज गुणन से समीकरण (1) एक यर्थात अवकल समीकरण बन जाती है।

(C) यदि समीकरण $yf(xy)\,dx + xg(xy)dy = 0$ निम्न प्रकार की समघात अवकल समीकरण हो तो $xy = v$ रखकर चर पृथक्करण करते है।

5.3 यर्थाथ अवकल समीकरण (Exact Differential Euation):

$M + N\frac{dy}{dx} = 0$ .....(1) प्रकार की अवकल समीकरणें

जिजमें M व N किसी फहन के यथातथ (या यर्थाथ) अवकल होते हैं । समाकलित करने पर $f(x,y) = c$ में बदल जाती है।

उदाहरणतः $y^2dy + x\,dx + \frac{dx}{x} = 0$ एक यर्थाथ अवकल समीकरण है।

नोट : (i) समीकरण (1) के यर्थाथ होने का आवश्यक प्रतिबन्ध है कि $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(ii) यर्थाथ अवकल समीकरणों के हल के लिए निम्न यर्थाथ अवकल याद होने चाहिए।

(a) $xdy + y\,dx = d(xy)$ (b) $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$ (c) $2(x\,dx + y\,dy) = d(x^2 + y^2)$

(d) $\frac{xdy - ydx}{xy} = d\left(\ln\frac{y}{x}\right)$ (e) $\frac{xdy - ydx}{x^2 - y^2} = d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ (f) $\frac{xdy - ydx}{xy} = d(\ln xy)$

(g) $\frac{xdy - ydx}{x^2y^2} = d\left(-\frac{1}{xy}\right)$

रैखिक अवकल समीकरण (Linear Differential Equation)

रैखिक अवकल समीकरण निम्न गणधर्म रखती है।

(i) जब किसी अवकल समीकरण में आश्रित चर तथा उसके अवकलज प्रथम घात में हो एवं दोनों एक दूसरे से गुणा न हो

(ii) सभी अवकलज बहुपत रूप में हो

(iii) कोटि एक से अधिक हो सकती हे।

m कोटि की अवकल समीकरण निम्न रूप में होती है।

$$P_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + P_1(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + P_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_m(x)\,y = \phi(x)$$

जहां $_0(x), P_1(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P_m(x)$ अवककल समीकरण के गुणांक कहलात है

नोटः $\frac{dy}{dx} + y^2 \sin x = \ln x$ एक रैखिक अवकल समीकरण नहीं है।

6.1 प्रथम घात की रैखिक अवकल समीकरण (Lineaer differential equation of first order)

$\frac{dy}{dx} + Py = Q, y$ में रैखिक अवकल समीकरण है।

जहां P व Q, x के फलन है।

समाकलन गुणक (I.F.) :

यह एक ऐसा व्यंजक है जिसे अवकल समीकरण को यर्थाथ रूप में लाने के लिए गुणा किया जाता है।

$I.F = e^{\int Pdx} + Py.e^{\int Pdx} = Q.e^{\int Pdx}$ (समाकन अचर को नहीं लिया गया है।)

$\therefore$ इससे गुणा के बाद समीकरण निम्न रूप से लेती है।

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y.e^{\int Pdx}) = Q.e^{\int Pdx}$ $\Rightarrow y.e^{\int Pdx} = \int Q.e^{\int Pdx} + C$

नोटः यद y को स्वतंत्र तथा x को आश्रित चर ले तो अवकल समीरण का रूप $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ होता है।

जहां P_1, Q_1, y के फलन या अचर है।

तथा $I.F. = e^{\int P_1 dy}$

6.5रैखिक रूप से परिर्वतित होने वाले समीकरण :

6.2.1 चर परिवर्तन द्वारा (By change of variable) :

अधिकतर अवकल समीकरण में अरेखिय पद को उपयुर्क्त प्रतिस्थन द्वारा रेखिक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है।

6.2.2बरनौली समीकरण (Bernoulli'sequation):

$\frac{dy}{dx} + Py = Q.y^n, n \neq 0$ तथा $n \neq 1$ रूप की समीकरण

जहां P तथा Q, x में फलन है बरनौली समीकरण कहलाती है जो y^n से विभाजित कर $y^{-n+1} = v$ रखने पर v में रैखिक समीकरण बन जाती है।

उदाहरण : $2\sin x \frac{dy}{dx} - y\cos x = xy^3e^x$

क्लोरेट समीकरण (Clairaut's Equation)

अवकल समीकरण

$y = mx + f(m)$ .....(1) जहां $m = \frac{dy}{dx}$

को क्लोरेट समीकरण कहते है।

समीकरण (1) को हल करने के लिए इसका x के सापेक्ष अवकलन करने पर –

$$\frac{dy}{dx} = m + x\frac{dm}{dx} + \frac{df(m)}{dm}$$

$$x\frac{dy}{dx} + \frac{df(m)}{dm}\frac{dm}{dx} = 0$$

या तो $\frac{dm}{dx} = 0 \Rightarrow m = c$.....(2)

या $x + f'(m) = 0$.....(3)

नोट :

(i) यदि (1) एवं (2) को एक साथ लेकर m का विलोपन कर दें तो प्राप्त हल (1) का सामान्य हल कहलता है।

(ii) यदि (1) एवं (3) का एक साथ लेकर m का विलोपन कर दें तो प्राप्त हल में कोई स्वेच्छ अचर नहं रहता तथा साथ ही यह हल (1) का विशेष हल भी नहीं है। इस हल को T (1) का विचित्र हल कहते है।

लम्बकोणीय प्रक्षेप्य (Orthogonal Tajectory)

दिये कये वक्र निकाय का लम्बकोणीय प्रक्षेप्य (trajectory) वह वक्र होता है जो दिये गये वक्र निकाय के प्रत्येक सदस्य को समीकरण को काटता है।

लम्बकोणीय प्रक्षेप्य (Orthogonal Trajectory) ज्ञात करने के लिए पद :

(i) माना दिये गये वक्र निकाय का समीकरण $f(x, y, c) = 0$ है जहां c एक स्चेच्छ अचर है।

(ii) दी गइ समीकरण को x के सापेक्ष अवकलन करके c का विलोपन करते है।

(ii) पद (ii) प्राप्त समीकरण में $\frac{dy}{dx}$ की जगह $-\frac{dx}{dy}$ प्रतिस्थापित करते है।

(iv) पद (iii) प्राप्त अवकल समीकरण को हल करते है। इस प्रकार पद (iv) में प्राप्त हल ही लम्बकोणीय प्रक्षेप्य है।

अवकल समीकरण के ज्यामितीय अनुप्रयोग

(Geometrical application of differential equation):

दिये गये ज्यामितिय सवाल से अवकल समीकरण बनाइये

निम्नलिखित सूत्र उपयोगी है–

(i) स्पर्श की लम्बाई $(L_T) = \left|\frac{y\sqrt{1+m^2}}{m}\right|$ (ii) अभिलम्ब की लम्बाई $(L_N) = \left|y\sqrt{1+m^2}\right|$

(iii) अर्धस्पर्शी की लम्बाई $(L_{ST}) = \left|\frac{y}{m}\right|$ (ii) अद्योलम्ब की लम्बाई $(L_{SN}) = |my|$

जहां y बिन्दु की कोटि तथा m स्पर्श की प्रवणता $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ है।

Exercise -1

1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. अवकल समीकरण $r=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ की कोटि और घात क्रमशः है–

(A) 2,2 (B) 2,3 (C) 2,1 (D) इनमें से कोई नहीं

2. परवलय $x^2=4y$ की सभी स्पर्श रेखाओं की अवकल समीकरण की कोटि और घात है–

(A) 1,2 (B) 2,2 (C) 3,1 (D) 4,1

3. सभी शांकवों जिनका केन्द्र मूलबिन्दू पर स्थित है, की अवकल समीकरण की कोटि है–

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) इनमें से कोई नहीं

4. मूलबिन्दू से इकाई दूरी पर स्थित सभी सरल रेखाओं की अवकल समीकरण है–

(A) $\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ (B) $\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(

C) $\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ (D) $\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)^2=1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

5. यदि $\frac{dy}{dx}=e^{-2y}$ और $y=0$ जब $x=5$ हो तो $y=3$ के लिए x का मान

(A) e^5 (B) e^6+1 (C) $\frac{e^6+9}{2}$ (D) $\log_e 6$

6. वक्र जिसका अधोलम्ब नियत है, का समीकरण है–

(A) $y=ax+b$ (B) $y^2=2ax+b$ (C) $ay^2-x^2=a$ (D) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $\frac{dy}{dx}=1+x+y+xy$ और $y(-1)=0$ हो तो y है

(A) $e^{(1-x)^2/2}$ (B) $e^{(1+x)^2/2}-1$ (C) $\log_e(1+x)-1$ (D) $1+x$

8. जब $x\to\infty$ हो तो अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}-ky=0, y(0)=1$ का हल शून्य की ओर अग्रसर होता है, यदि

(A) $k=0$ (B) $k>0$ (C) $k<0$ (D) इनमें से कोई नहीं

9. $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=-g$ का हल है –

(A) $v=ce^{\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$ (B) $v=c-\frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}$ (C) $v=e^{\frac{k}{m}t}=c-\frac{mg}{k}$ (D) $ve^{\frac{k}{m}t}=c-\frac{mg}{k}$

एक से अधिक विकल्प सही

10. $x^2+y_1^{\,2}+xyy_1-6y^2=0$ का हल है–

(A) $y=Cx^2$ (B) $x^2y=C$ (C) $\frac{1}{2}\log y=C+\log x$ (D) $x^3y=C$

11. यदि $y=e^{-x}\cos x$ और $y_n+k_ny=0$ जहां $y_n=\frac{d^ny}{dx^n}$ और $k_n,n\in N$ अचर है–

(A) $k_4=4$ (B) $k_8=-16$ (C) $k_{12}=20$ (D) $k_{16}=-24$

12. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2+y+\cot^2 x=0}$ का हल है–

(A) $y=2+c_1\cos x+\sqrt{c_2}\sin x$

(B) $y=\cos x.\ell n\left(\tan\frac{x}{2}\right)+2$

(C) $y=2+c_1\cos x+c_2\sin x+\cos x\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

(D) उपरोक्त सभी

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. निम्नलिखित अवकल समीकरणों की कोटि और घात ज्ञात कीजिए–

(i) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+y^4=0$ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$

(iii) $e^{\frac{d^3y}{dx^3}}-x\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (iv) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/2}=x\frac{d^3y}{dx^3}$

2. निम्नलिखित समीकरणों की कोटि ज्ञात कीजिए (जहां a,b,c,d प्राचल है।)

(i) $(\sin a)x+(\cos a)y=\pi$ (ii) $\ell n(ay)=be^x+c$

3. निम्नलिखित वक्रों से बनने वाली अवककल समीकरण ज्ञात कीजिए–

$y^2=m(n^2-x^2)$, जहां m,n स्वेच्छ अचर है।

$c(y+c)^2=x^3$, जहां 'c' स्वेच्छ अचर है।

4. निम्न समीकरणों को हल कीजिए:

(i) $(1+\cos x)dy=(1-\cos x)dx$ (ii) $\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}+xy\frac{dy}{dx}=0$

5. बिन्दु (1,0) से गुजरने वाले और अवकल समीकरण $(1+y^2)dx-xydy=0$ को संतुष्ट करने वाले शांकव का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा नाभि व उत्केन्द्रता भी ज्ञात कीजिए।

6. हल कीजिए –

(i) $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$ (ii) $\frac{x\,dx-y\,dy}{x\,dy-y\,dx}=\sqrt{\frac{1+y^2-y^2}{x^2-y^2}}$

7. हल कीजिए–

(i) $x^2\,dy+y(x+y)\,dx=0$, दिया गया है $y=1$ जब $x=1$

(ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sin\left(\frac{y}{x}\right)$

8. (i) एक पात्र का तापमान T जिस दर से गिर रहा है वह अन्तर $T-S$ के समानुपाती है, जहां S बाह्य वातावरण का नियत तापमान है। अतः $\frac{dT}{dt}=-k(T-S)$, जहां $k>0$ एक स्थिरांक है और t समय है। अवककल समीकरण हल कीजिए यदि $T(0)=150$ दिया गया है।

(ii) एक गोलाकार गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफल में परिवर्तित की दर समय t के समानुपाती है। यदि इसकी प्रारम्भिक त्रिज्या 3 इकाई और 2 सेकण्ड के बाद यह 5 इकाई है, तो t सेकण्ड पश्चात् त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

9. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2xy-x^2}{x^2+2xy-y^2}$ को संतुष्ट करने के वाले और बिन्दु (1,–1) से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात करो।

10. यदि एक वक्र $(1,\pi/4)$ से गुजरता है और इसके किसी बिन्दु (x,y) पर प्रवणता $y/x-\cos^2 y/x$ द्वारा दी जाती है तो वक्र का समीकरण ज्ञात करो।

11. हल कीजिए –

(i) $\frac{dy}{dx}=y\tan x-2\sin x$ (ii) $(x+3y^2)\frac{dy}{dx}=y, y>0$

12. (a) निम्नलिखित समीकरणों के समाकलन गुणांक ज्ञात कीजिए–

(i) $(x\log x)\frac{dy}{dx}+y=2\log x$ (ii) $\frac{dy}{dx}=y\tan x-y^2\sec x$, is

(b) यदि समीकरण $x(1-x^2)dy+(2x^2y-y-ax^3)\,dx=0$ का समाकलन गुणांक $e^{\int p.dx}$ हो तो P का मान ज्ञात कीजिए।

13. हल कीजिए –

(i) $y(x^2y+e^x)\,dx=e^x dy$ (ii) $2y\sin x\,dy+(y^2\cos x+2x)dx=0$

14. हल कीजिए

(i) $(2x-y+1)+(2y-x-1)dy=0$ (ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{4x+6y+5}{3y+2x+4}$

(iii) $(2x+3y-5)dy+(3x-2y-5)dx=0$

15. **निम्नलिखित के लाम्बिक पथ (orthogonal trajectories) है।**

(i) $ay^2 = x^3$ (ii) $y = ax^2$ (iii) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

16. वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी स्वेच्छ बिन्दु स्पर्श रेखा और मूलबिन्दु के बीच की दूरी उसी बिन्दु का अभिलम्ब और मूलबिन्दु के बीच की दूरी के बराबर है।

17. हल कीजिए–

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$ (ii) $\frac{d^3y}{dx^3} = 8\frac{d^2y}{dx^2}$ जहां $y(0) = \frac{1}{8}, y_1(0) = 0$ एवं $y_2(0) = 1$

Exercise -2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि $y_1(x)$ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0$ का एक हल है, तो अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$ का हल है–

(A) $\frac{1}{y(x)}\int y_1(x)dx$ (B) $y_1(x)\int \frac{r(x)}{y_1(x)}dx$ (C) $\int r(x)y_1(x)dx$ (D) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $y_1(x)$ और $y_2(x)$ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$ के दो हल है तो $y_1(x) + y_2(x)$ निम्न में से किसका हल है ?

(A) $\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0$ (B) $\frac{dy}{dx} + 2f(x)y = r(x)$

(C) $\frac{dy}{dx} + f(x)y = 2r(x)$ (D) $\frac{dy}{dx} + 2f(x)y = 2r(x)$

3. $\lim_{x\to\infty} y(x)$ का अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = y - y^2$ जहां $y(0) = 2$ प्राप्त मान है–

(A) शून्य (B) 1 (C) ∞ (D) इनमें से कोई नहीं

4. $y\,dx - x\,dy + 3x^2y^2\ y^2e^{x^3}\ dx = 0$ हल है–

(A) $\frac{x}{y} + e^{x^3} = C$ (B) $\frac{x}{y} - e^{x^3} = C$ (C) $-\frac{x}{y} + e^{x^3} = C$ (D) इनमें से कोई नहीं

5. $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ हल हल है–

(A) $\sin^{-1}x, \sin^{-1}y = C$ (B) $\sin^{-1}x, = C\sin^{-1}y$

(C) $\sin^{-1}x - x\sin^{-1}y = C$ (D) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = C$

6. S1 : परवलय जिनके शीर्ष मूल बिन्दू पर तथा निभयां $x-$अक्ष पर, के अवकल समीकरण में च पृथव है।
S2 : मूलबिन्दु से p दूरी पर स्थित सरल रेखा के अवकल समीकरण में चर पृथक है।
S3 : सभी शांकव जिनकी अक्ष निर्देशांक अक्षों के सम्पाती है, का समीकरण 2 कोटि है।

(A) TTT (B) TFT (C) FFT (D) TTF

7. अवकल समीकरण $y_1 y_3 = 3y_2^2$ का हल है–

(A) $x = A_1 y^2 + A_2 y + A_3$ (B) $x = A_1 y + A_2$

(C) $x = A_1 y^2 + A_2 y$ (D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

8. अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx}(e^x + e^{-x}) + 1 = 0$ का हल है–

(A) $y + e^{-x} = C$ (B) $y - e^{-x} = C$

(C) $y + e^x = C$ (D) $y - e^x = C$

9. $x^2 y_1^2 + xy\,y_1 - 6y^2 = 0$ का हल है–

(A) $y = Cx^2$ (B) $x^2 y = C$ (C) $\frac{1}{2}\log y = C + \log x$ (D) $x^3 y = C$

10. वक्रों $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a/x$ के निकाय का लम्बिक पथ "(orthogonal trajectories) है–

(A) $9ay(y+c)^2 = 4x^3$ (B) $y + C = \frac{-2}{3\sqrt{a}} a^{3/2}$ (C) $y + C = \frac{2}{3\sqrt{a}} x^{3/2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. निम्न लिखित समीकरण को हल कीजिए–

(i) $3\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = \frac{x^3}{y^2}$ (ii) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}(e^x - e^y)$

(iii) $x^2 y - x^3 \frac{dy}{dx} = y^4 \cos x$ (iv) $y\,y' \sin x = \cos x(\sin x - y^2)$

2. निम्नलिखित अलकल समीकरण को हल कीजिए।

(i) $(x_2 + y^2 + a^2)y\frac{dy}{dx} + x(x^2 + y^2 - a^2) = 0$

(ii) $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2+y^2}\right)y\,dy = 0$

3. वह वक्र ज्ञात कीजिए लिए वक्र के किी बिन्दु स्पर्श रेखा एवं अधोः स्पर्श रेखा की लम्बाईयों का योग स्पर्श बिन्दु के निर्देशांकों के गुणनफल के समानुपाती होती है, समानुपाती गुणांक k है।

4. वक्र $y = f(x)$ ज्ञात कीजिए, जहां $f(x) \geq 0, f(0) = 0$ और जो $[0,x]$ आधर वाले एक टेढ़ी रेखाओं से बने चतुष्फलक को परिबद्ध करता है और उसका क्षेत्रफल $f(x)$ की $n+1$ वीं घातके समानुपाती है। दिया गया है कि $f(1) = 1$

5. वक्र की पकृति ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु P पर अभिलम्ब बिन्दु P पर त्रिज्या सदिश के बराबर है।

6. हल कीजिए: $\frac{dy}{dx} = y + \int_0^1 y\,dx$ दिया गया है $y = 1$, जहां $x = 0$

7. अवकल समीकरण $x(1 - x\ell ny)\frac{dy}{dx} + y = 0$ का समाकल वक्र ज्ञात कीजिए जो $(1, 1/e)$ से गुजरता है।

8. वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी, स्पर्श बिन्दु के भुज के बराबर है। उपरोक्त प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1,1) से गुजरता है।

9. निम्नलिखित गुणधर्म रखने वाले वक्र ज्ञात कीजिए : स्पर्श बिन्दु एवं $x-$ अक्ष के मध्य स्पर्श का अन्तःखण्ड $y-$ अक्ष द्वारा समद्विभाजित होता है।

10. माना y_1 तथा y_2 समीकरण $y'P(x).y = Q(x)$ के दो भिन्न–भिन्न हल है, तब
    (i) सिद्ध कीजिए कि $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ दी हुयी समीकरण का व्यापक हल है – (जहां c एक अचर है)
    (ii) यदि $\alpha y_1 + \beta y_2$ दी हुयी समीकरण का एक हल हो तो, तो α और β के मध्य सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

Exercise -3

3-A (स्तम्भ मिलान)

1. मिलान कीजिए

स्तम्भ –I		**स्तम्भ** –II	
(A)	$y - \frac{xyd}{dx} = y^2 + \frac{dy}{dx}$ का हल है।	(p)	$xy^2 = 2y^5 + c$
(B)	$(2x - 10y^3)\frac{dy}{dx} + y = 0$ का हल है ।	(q)	$\sec y = x + 1 + ce^x$
(C)	$\sec^2 y\,dy + \tan y\,dx = dx$ का हल है।	(r)	(x+1) (1-y) =cy
(D)	$\sin\frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x\cos y)$ का हल है।	(s)	$\tan y = 1 + ce^{-x}$

2. मिलान कीजिए

स्तम्भ –I		**स्तम्भ** –II	
(a)	$xdy = y(dx + ydy), y > 0$ $y(1) = 1$ और $y(x_0) = -3$ तब $x_0 =$	(p)	$\frac{1}{4}$

(B) यदि $(t+1)\frac{dy}{dt} - ty = 1$ का हल $y(t)$ है तथा $y(0) = -1$ तब $y(+1=)$ (q) -16

(C) $(x^2 + y^2)\,dx = xydx$ और $y(1) = 1$ और $y(x_0) = e$, तब $x_0 =$ (r) $-\frac{1}{2}$

(D) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0, y(1) = 1$ तब $y(2) =$ (s) $\sqrt{3e}$

3-B (कथन / कारण)

3. कथन –1 संबंध $y = A\sin x + B\cos x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ द्वारा प्रर्शित किया जाता है।

कथन –2 $\sec^2 y\frac{dy}{dx} + x\tan y = x^2$ का हल है $\tan y = x^2 - ce^{x^2/2} + 2$

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, और कथन–2 सत्य है:।

4. कथन –1: $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + y(-1 + \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0$ का हल है $x - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{3/2} + c = 0$

कथन –2: $(1 + xy)y\,dx + (1 - xy)x\,dy = 0$ का हल है $\ell n\frac{x}{y} - \frac{1}{xy} = c$

(a) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(b) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(c) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(d) कथन–1 असत्य है, और कथन–2 सत्य है:।

5 .कथन –1 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = x + \frac{1}{x^2}$ को संतुष्ट करने वाले तथा बिन्दु (3,9) से गुजरने वाली वक्र का समीकरण $6xy = 3x^3 + 29x - 6$ है–

कथन –2 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx}(e^x + e^{-x}) + 1 = 0$ का हल है $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, और कथन–2 सत्य है:।

6. कथन –1 $\frac{\frac{xdy}{dx} - y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = mx^2$ का हल है $\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{mx^2}{2} + c$

कथन –2 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$ का हल है $x(y + \cos x) = \sin x + c$

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।

(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।

(D) कथन–1 असत्य है, और कथन–2 सत्य है:।

7. कथन –1: बिन्दु (1,0) से गुजरने वाले तथा अवकल समीकरण $(1+y^2)dx - xy\,dy = 0$ को संतुष्ट करने वाले वक्र का समीकरण $x^2 - y^2 = 1$ है।

कथन –2 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x).g(y)$ को चरपृथक्करण विधि हल किया जा सकता है $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।

(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।

(D) कथन–1 असत्य है, और कथन–2 सत्य है:।

3-C (अनुच्छेद)

8. अलक समीकरणों को एक x और y व्यंजक के ठीक अवकलन के रूप में व्यक्त करके हल किया जा सकता है यानि कि उन्हें $d(f(x,y)) = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

e.g.

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{2xdx + 2ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = -d\left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = -d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x}\right) = 0$$

हल है $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = c.$

उपरोक्त विधि का उपयोग करके नीचे दिये गये प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

8.1 $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$ का सामान्य हल है–

(A) $x^4 + x^2y^2 - y^4 = c$ (B) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = c$ (C) $x^4 - x^2y^2 - y^4 = c$ (D) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = c$

8.2 $\frac{xdy}{x^2+y^2} + \left(1 - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx = 0$ का सामान्य हल है–

(A) $x + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$ (B) $x + \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = c$ (C) $x - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$ (D) इनमें से कोई नहीं।

8.3 $e^y\,dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ का सामान्य हल है–

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

(A) $xe^y - y^2 = c$ (B) $xe^x - x^2 = c$ (C) $xe^y - x = c$ (D) $xe^y - 1 = cy^2$

9. अनुच्छेद

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ को चर पृथक्करण विधि से किया जाता है $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

9.1 अवकल समीकरण $(1+y^2)dx - xy\,dy = 0$ को संतुष्ट करने वाले बिन्दु (1,0) से गुजरने वाले वक्र का समीकरण है–

(A) $x^2 + y^2 = 1$ (B) $x^2 - y^2 = 1$ (C) $x^2 + y^2 = 2$ (D) $x^2 - y^2 = 2$

9.2 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + +\frac{1+y^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ का हल है

(A) $\tan^{-1} y + \sin^{-1} x = c$ (B) $\tan^{-1} y + \sin^{-1} y = c$

(C) $\tan^{-1} y.\sin^{-1} x = c$ (D) $\tan^{-1} y - \sin^{-1} x = c$

9.3 यदि $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ और $y(-1) = 0$ तब $y =$

(A) $e^{\frac{(1-x)^2}{2}}$ (B) $e^{\frac{(1-x)^2}{2}} - 1$ (C) $\ell n(1+x) - 1$ (D) $1 + x$

3-D (सत्य/असत्य कथन)

10. (3,4) से गुजरने वाली तथा अवकल समीकरण

$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x-y)\frac{dy}{dx} - x = 0$ को संतुष्ट करनेवाली वक्र का समीकरण $x - y + 1 = 0$ हो सकता है।

11. $f(x,y) = e^{y/x} + \tan\frac{y}{x}$ घात शून्य का समघातीय है

12. $(2x\,\ell n\,y)dx + \left(\frac{x^2}{y}\right) + 3y^3\,dy = 0$ का हल है $x^2\,\ell n\,y + y^3 = c$

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y\ell ny + y - x}$ का हल है $x = y\,\ell n\,y + \frac{c}{y}$

14. परवलय $y^2 = 4ax$ की सभी स्पर्श रेखाओं की समीकरण $xy_1{}^2 - y + y_1 + a = 0$

15. यदि $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+3}{2y+1}$ का हल एक वृत्त प्रर्शित करता है तो $a = -4$ है।

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

16. अवकल समीकरण $x^2 = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\frac{dy}{dx} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{-3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}{3!} + ...$ का हल है––––––

17. एक वक्र जो कि (1,2) से गुजरता है तथा जिसका अधोलम्ब प्रत्येक बिन्दु पर 2 है। ————————
18. वक्र निकाय $y = ax^2$ का लाम्बिक पथ है जो कि मूल बिन्दु से नहीं गुजरता है ———
19. यदि किसी बिन्दु $P(x,y)$ का वक्र प्रवणता $\frac{x+y+1}{22y+2x+1}$ है तथा मूल बिन्दु से गुजरता है तो वक्र है
20. अवकल समीकरण $e\left(d^3y/dx^3\right)^2 + x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ की घात है————————

Exercise - 4

4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT-JEE-2008

1. माना $y = y(x)$ निम्न अवकल समीकरण $x\sqrt{x^2-1}dy - y\sqrt{y^2-1}dx = 0$ का एक हल है जो $y(2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ को संतुष्ट करता है।

कथन –1: $y(x) = \sec\left(\sec^{-1}x - \frac{\pi}{6}\right)$

कथन –2 $y(x)$ निम्न द्वारा दिया जाता है $\frac{1}{y} = \frac{2\sqrt{3}}{x} - \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है: कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है:।

IIT-JEE-2007

2. माना $f(x)$ अंतराल $(0,\infty)$ में अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f(1) = 1$ और $\lim_{t\to x}\frac{t^2f(x) - x^2f(t)}{t-x} = 1, \forall x > 0$ तब $f(x)$ है–

(A) $\frac{1}{3x} + \frac{2x^2}{3}$ (B) $\frac{-1}{3x} + \frac{4x^2}{3}$ (C) $\frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2}$ (D) $\frac{1}{x}$

3. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ एक वृत्त निकाय को प्रदर्शित करती है जिसकी

(A) त्रिज्या चर एंव केन्द्र (0,1) अचर है। (B) त्रिज्या चर एवं केन्द्र (0,–1) है।
(C) त्रिज्या अचर एवं केन्द्र $x-$ अक्ष के अनुदिश चर है। (D) त्रिज्या अचर एवं केन्द्र $y-$ अक्ष के अनुशि चर है।

IIT-JEE-2006

4. वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु $P(x,y)$ पर स्पर्श रेखा $x-$ अक्ष एवं $y-$ अक्ष को क्रमशः A एवं B पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि $BP : AP = 3 : 1$ हो, तो (दिया गया है कि $f(1) = 1$)

(A) वक्र का समीकरण $x\frac{dy}{x}-3y=0$ है (B) $(1,1)$ पर अभिलम्ब $3y-x=2$ है।

(C) वक्र $(2,1/8)$ से गुजरता है। (D) वक्र का समीकरण $x\frac{dy}{dx}+3y=0$ है।

IIT-JEE-2005

5. अवकल समीकरण $(x^2+y^2)dy=xy\,dx$ का हल $y=y(x)$ प्रतिबन्ध $y(1)=1$ एवं $y(x_0)=e$ को संतुष्ट करता है तो x_0 का मान है–

(A) $\sqrt{3}e$ (B) $\sqrt{2(e^2-1)}$ (C) $\sqrt{2(e^2+1)}$ (D) $\sqrt{(e^2+1)/2}$

6. मानाकि अवकल समीकरण $ydx+y^2dy=xdy$ को $y=y(x)$ संतुष्ट करता है यदि $y(x)>0,\forall x\in R$ एवं $y(1)=1$ हो तो $y(-3)$ का मान है–

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

7. यदि वक्र $y=f(x)$ के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु तथा $x-$ अक्ष के बीच के अन्तः खण्ड की लम्बाई 1 इकाई है, तो वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-2004

8. $\left(\frac{2+\sin x}{y+1}\right)\frac{dy}{dx}=-\cos x; y(0)=1$ हो तो $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ का मान है–

(A)1/3 (B) -2/3 (C) 2/3 (D) -1/3

9. एक वक्र बिन्दु $(2,0)$ से गुजरता है तथा बिन्दु $P(x,y)$ पर ढाल $\frac{(x+1)^2+(y-3)}{(x+1)}$ है। वक्र का समीकरण तथा चतुर्थ पाद में $x-$ अक्ष एवं वक्र के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-2003

10. यदि $(1+t)\frac{dy}{dt}-ty=1$ का हल $y(t)$ है तथा $y(0)=-1$ हो तो $y(1)$ का मान है।

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $e+\frac{1}{2}$ (C) $e-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

11. H ऊँचाई और R त्रिज्या का एक प्रतिलोग शुंकु पैंदे पर रखा हुआ है। इसे एक वाष्शील द्रव से पूरा भरा जाता है। यदि वाष्न की दर हवा के साथ स्पर्श में रहने वाले द्रव के पृष्ठीय क्षेत्रफल के समानुपाती (समानुपाती नियतांक $K>0$ है) तो वह समय ज्ञात कीजिए जिसमें पूरा द्रव वाष्पित हो जायेगा।

12. यदि $P(1)=0$ तथा $\frac{dP(x)}{dx}>P(x)\forall x\geq 1$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $P(x)>0\forall x>1$

IIT-JEE-2001

13. माना $f(x), x \geq 0$ अऋणात्मक सतत् फलन है तथा $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\; x \geq 0.$ यदि कुछ $c > 0$ के लिए $f(x) \leq cF(x), \forall\, x \geq 0$ हो तो प्रदर्शित कीजिए कि $f(x) = 0, \forall\, x \geq 0$

14. 2 मीटर त्रिज्या का एक अर्द्ध गोलीय टैंक पानी से पूरा भरा हुआ है और इसके पैंदे में $12\,cm^2$ अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल का एक निकास द्वारा है। इस निकास द्वारा को किसी क्षण खोला जाता है। इस द्वार से पानी की निकासी नियम $v(t) = 0.6\sqrt{2gh(t)}$ के अनुसार होती है, जहां $v(t)$ और $h(t)$ क्रमशः समय t पर निकास द्वारा से बहने वाले पानी का वेग और निकास द्वारा के उपर पानी के तल की ऊँचा है और g गुरूत्वीय त्वरण है। टैंक को पूरा खाली होने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिऐं

IIT-JEE-2001

15. एक देश में खाद्यान्न की 10% की कमी है। इसकी जनसंख्य प्रति वर्ष 3% की दर से बढत्रतीहै । इसका वार्षिक खाद्यान्न उत्पादन विगत वर्ष की तुलना में प्रतिवर्ष 4% ज्यादा होता है। यह मानते हुए कि प्रति व्यक्ति खाद्यान्न की आवष्यकता नियत है, सिद्ध कीजिए कि 'n' वर्षों के बाद देश खाद्यान्न उत्पादन में आत्मनिर्भर हो जायेगा, जहां n न्यूनतम पूर्णांक है जो $\frac{\ell n10 - \ell n9}{\ell n(1.04) - 0.03}$ से बड़ा या बराबर है।

IIT-JEE-1999

16. (i) अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ का हल है–

(A) y=2 (B) y=2x (C) y=2x-4 (D) $y=2x^2-4$

(ii) वक्र निकाय $y^2 = 2c\left(x + \sqrt{c}\right)$ जहां c धनात्मक प्राचल है, को प्रदर्शित करने वाले अवकल समीकरण के लिए–

(A) कोटि 1 (B) कोटि 2 (C) घात 3 (D) घात 4

17. बिन्दु (1,1) से गुजरने वाले वक्र कर गुण है कि वक्र के किसी बिन्दु P पर अभिलम्ब से मूल बिन्दु ककी लम्बवत् दूरी P की $x-$ अक्ष से दूरी के बराबर है। वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-1998

18. वकल समीकरण जिसका हल $y = (C_1 + C_2)\cos(x + C_3) - C_4 e^{x+C_5}$ द्वारा दिया जाता है कि कोटि है– जहां C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 स्चेच्छ अचर है,

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

,19. वक्र C का गुण है कि यदि C के किसी बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा निर्देशी अक्षें को A एवं B पर मिलती है तो AB का मध्य बिन्दु P है। वक्र बिन्दु (1,1) से गुजरता है। वक्र की समीकरण ज्ञात कीजिए।

20. अवकल समीकरण $(1 + \tan y)(dx - dy) + 2x\,dy = 0$ को हल कीजिए।

IIT-JEE-1997

21. माना $u(x)$ एवं $v(x)$ अवकल समीकरणों $\frac{du}{dx} + p(x)u = f(x)$ एवं $\frac{dv}{dx} + p(x)v = g(x)$ जहां $p(x), f(x)$ एवं $g(x)$ सतत् फलन है, तो संतुष्ट करते है। यदि कुछ x_1 के लिए $u(x_1) > v(x_1)$ एवं सभी $x > x_1,$ के लिए $f(x) > g(x)$ हो, तो

सिद्ध कीजिए कि कोई बिन्दु (x,y), जहां $x > x_1$, समीकरण $y = u(x)$ एवं $y = v(x)$ को संतुष्ट नहीं करता है।

4-B (पूर्ववर्ती)

22. मूल बिन्दु से गुजरने वाले तथा $x-$ अक्ष पर केन्द्र वाले सभी वृत्तों की अवकल समीकरण है।

(A) $x^2 = y^2 + xy\frac{dy}{dx}$ (B) $x^2 + y^2 + 3xy\frac{dy}{dx}$ (C) $y^2 = x^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$ (D) $^2 = y^2 + xy\frac{dy}{dx}$

23. अवकल समीकरण जिनका हल $Ax^2 + By^2 = 1$ है, जहां A और B स्वेच्छ अचर है, की है–

(A) प्रथम कोटि एवं द्वितीय घात (B) प्रथम कोटि एवं प्रथम घात
(C) द्वितीय कोटि एवं प्रथम घात (D) द्वितीय कोटि एवं द्वितीय घात

24. वक्र निकाय $y^2 = 2c(x + \sqrt{c})$ को प्रदर्शित करने वाले अवकल समीकरण जहां $c > 0$ एक चर है, कि कोटि तथा घात है–

(A) कोटि 2, घात2 (B) कोटि 1, घात 3
(C) कोटि 1, घात1 (D) कोटि 1, घात 2

25. यदि $x\frac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$ है, तब समीकरण का हल है–

(A) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = cy$ (B) $\log\left(\frac{y}{x}\right) = cx$ (C) $x\log\left(\frac{y}{x}\right) = cy$ (D) $y\log\left(\frac{x}{y}\right) = cx$

26. एक $10\,cm$ त्रिज्या वाली गोलाकार लोहे की गेंद जिस पर बर्फ की एक जैसी मोटाई की परत $50\,cm^3/min$ की दर से पिघलती है जब बर्फ की मोटाई $15\,cm$ है, तब किसी दर पर बर्फ की मोटाई पिघलती है–

(A) $\frac{5}{6\pi}\,cm/min$ (B) $\frac{1}{54\pi}\,cm/min$ (C) $\frac{1}{18\pi}\,cm/min$ (D) $\frac{1}{36\pi}\,cm/min$

27. वक्र निकाय $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ के लिये अवकल समीकरण जहां a एक स्चेच्छ अचर है–

(A) $2(x^2 - y^2)y = xy$ (B) $2(x^2 + y^2)y = xy$ (C) $(x^2 - y^2)y = 2xy$ (D) $(x^2 + y^2)y = 2xy$

28. अवकल समीकरण $y\,dx + (x + x^2y)dy = 0$ का हल है–

(A) $-\frac{1}{xy} = c$ (B) $-\frac{1}{xy} = \log y = c$ (C) $\frac{1}{xy} + \log y = c$ (D) $\log y = cx$

29. ऐसे परवलयों जिनकी अक्ष $x-$ है की घात तथा कोटि क्रमशः–

(A) 2,1 (B) 1,2 (C) 3,2 (D) 2,3

30. अवकल समीकरण $(1 + y^2) + (x - e^{\tan^{-1}y})\frac{dy}{dx} = 0$ का हल है–

(A) $(x-2) = ke^{-\tan^{-1}y}$ (B) $2x\,e^{-\tan^{-1}y} = e^{\tan^{-1}y} + k$
(C) $xe^{\tan^{-1}y} = \tan^{-1}y + k$ (D) $xe^{2\tan^{-1}y} = e^{\tan^{-1}y} + k$

31. $f(x) = 0$ के मूल ज्ञात करने के लिये न्यूटन विधि है–

(A) $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (B) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (C) $x_{n+1} = x_n + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$ (D) $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$

32. $\frac{dy}{dx} + y = 2e^{2x}$ तब y का मान है–

(A) $e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x} + c$ (B) $ce^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x} + c$ (C) $(1+x)e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x} + c$ (D) $ce^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x}$

33. अवकल समीकरण $(1+y^2) + (x - e^{\tan^{-1} y})\frac{dy}{dx} = 0$ का हल है–

(A) $2xe^{\tan^{-1} y} = e^{2\tan^{-1} y} + k$ (B) $xe^{2\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y} + k$

(C) $xe^{\tan^{-1} y} = \tan^{-1} y + k$ (D) $(x-2) = ke^{-\tan^{-1} y}$

34. अवकल समीकरा सिजका सामान्य हल $y = (c_1 + c_2)\sin(x + c_3) - c_4 e^{x+c_5}$ है की कोटि है–

(A) 4 (B) 5 (C) 2 (D) 3

35. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y\sec^2 x = \tan x \sec^2 x$ का हल है–

(A) $y = \tan x - 1 + ce^{-\tan x}$ (B) $y^2 = \tan x - 1 + ce^{\tan x}$

(C) $y = e^{\tan x} = x - 1 + c$ (D) $ye^{\tan x} = \tan x - 1 + c.$

36. अवककल समीकरण जिसका सामान्य हल $y = (c_1 + cL2)\cos(x + c_3) - c_4 e^{x+c_5}$ जहां $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5,$ स्वेच्छ अचर है की कोटि है–

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

37. अवकल समीकरण $x\,dx + y\,dy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$ का हल है–

(A) $x^2 + y^2 - 2\tan^{-1} x = c$ (B) $x^2 + y^2 + 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$

(C) $x^2 + y^2 + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$ (D) $x^2 + y^2 + 2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = c$

38. अवकल समीकरण जिनका हल एक परवलय है तथा $x-$अक्ष है की घात तथा कोटि है–

(A) 1,0 (B) 1,2 (C) 1,1 (D) 2,1

Answers

EXERCISE #1-A

1. A 2. A 3. B 4. C 5. C 6. B 7. B
8. C 9. A 10. ACD 11. AB 12. BC

EXERCISE #1-B

1. (i) (2,2)
   (ii) 1,1
   (iii) 3. degree is not applicable
   (iv) 3,2

2. (i) 1 (ii) 2

3. (i) $xyy_2 + (xy_1 - y)y_1 = 0$
   (ii) $12y(y')^2 = x[8(y')^3 - 27]$

4. (i) $y = 2\tan x/2 - x + c$
   (ii) $\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right| + \sqrt{1+y^2} = c$

5. Conic : $x^2 - y^2 = 1$ (hyperbola)
   Focil : $(\pm\sqrt{2},0)\, e = \sqrt{2}$

6. (i) $\log\left|\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)+1\right| = x + c$
   (ii) $\sqrt{x^2-y^2} + \sqrt{1+x^2-y^2} = \frac{c(x+y)}{\sqrt{x^2-y^2}}$

7. (i) $3x^2y = 2x + y$ (ii) $\tan\frac{y}{2x} = cx$

8. (i) $\frac{T-S}{150-S} = e^{-kt}$ (ii) $r = \sqrt{4t^2+9}$ units.

9. x+y=0

10. $\tan y/s = 1 - \log x$.

11. (i) $y = \cos x + c\sec x$ (ii) $\frac{x}{y} = 3y + c$

12. (a) (i) $|\ell n\, x|$
    (ii) $|\sec x|$
    (b) $\frac{(2x^2-1)}{x(1-x^2)}$

13. (i) $\frac{1}{y}e^x = -\frac{x^3}{3} + c$ (ii) $y^2 \sin x = -x^2 + c$

14. (i) $x^2 + y^2 - xy + x - y = c$
    (ii) $y = 2x + \frac{3}{8}\ell n(24y + 16x + 23) = c$
    (iii) $4xy + 3(x^2+y^2) - 10(x+y) = c$

15. (i) $3y^2 + 2x^2 = c^2$
    (ii) $x^2 + 2y^2 = c^2$
    (iii) $y^{7/3} - x^{4/3} = c$

16. $\sqrt{x^2+y^2} = ce^{\pm\tan^{-1}\frac{y}{x}}$

17. (i) $c_1e^x + c_2$ (ii) $64y = (e^{8x} - 8x) + 7$

EXERCISE # 2-A

1. B 2. C 3. B 4. A 5. D 6. A 7. A
8. AD 9. ACD 10. ABC

EXERCISE # 2-B

1. (i) $y^3(x+1)^2 = \frac{x^6}{6} + \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + c$
   (ii) $e^y = c.\exp(-e^x) + e^x - 1$
   (iii) $x^3y^{-3} = 3\sin x + c$
   (iv) $y^2 = \frac{2}{3}\sin x + \frac{c}{\sin^2 x}$

2. (i) $(x^2+y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = c$
   (ii) $x - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2} = c$

3. $y = \frac{1}{k}\ell n|c(k^2x^2 - 1)|$ 4. $y = x^{1/n}$

5. Rectangular hyperbola or circle.

6. $y = \frac{1}{3-e}(2e^x - e + 1)$

7. $x(ey + \ell ny + 1) = 1$

8. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

9. $y^2 = cx$

10. (ii) $\alpha+\beta+1$

EXERCISE #3

1. (A)-(r) (B) –(p) (C)-(s) (D) –(q)

2. (A)-(q) (B) –(r) (C)-(s) (D) –(p)

3. C 4. B 5. B 6. D 7. A 8.1 B 8.2. A

8.3 A 9.1 B 9.2 A 9.3 B 10. True11. rue

12. True 13. True 14. False 15. False

16. $y^2 = x^2(\ell nx - 1) + c$ 17. $y^2 = 4x$ 18.ellipse

19. $6y - 3x = \ell n\left|\frac{3x+3y+2}{2}\right|$ 20. not defined

EXERCISE #4

1. C 2. A 3. C 4. BCD 5. A 6. C

7. $\log\left|\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\right| + \sqrt{1-y^2} = \pm x + c$

8. A 9. 4/3 10. A 11. t=H/k

14. $\frac{14\pi\times10^5}{27\sqrt{g}}$ 16. (i) C (ii) AC

17. $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 18. C

19. xy=1 20 $xe^y(\cos y + \sin y) = e^y \sin y + c$

22. C 23. C 24. B 25. B 26. CD 27. C28. B

29. B 30. B31. C32. A 33.A34. D35. A

36. B 37. C 38. B

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

MQB

EXERCISE #1(बहुविल्पीय प्रश्न)

केवल एक सही विकल्प

1. वक्र निकाय $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$ की अवकल समीकरण है–

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - y$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$ (C) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - 2y$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} + y$

2. $y = A\cos(\omega t)$ से A और B को विलुप्त करने पर प्राप्त अवकल समीकरण है–

(A) $y''+y'=0$ (B) $y''+\omega^2 y = 0$ (C) $y'' = -\omega^2 y$ (D) $y''+y = 0$

3. एक सममतल में सभी अ –ऊर्ध्वाधर रेखाओं (non-vertical lines) की अवककल समीकरण है–

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (B) $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ (C) $\frac{dy}{dx} = 0$ (D) $\frac{dx}{dxy} = 0$

4. सभी परवलयों जिनकी सममिति का अक्ष x – के सम्पाती है, की अवकल समीकरण है–

(A) $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (B) $y\frac{d^2x}{dy^2} + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0$

(C) $y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं।

5. अवकल समीकरण जिसका हल $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ (a एक नियंतांक है) है, होगी–

(A) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = a^2\frac{d^2y}{dx^2}$ (B) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$

(C) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]^3 = a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ (D) इनमें से कोई नहीं।

6. सभी वृत्तों जो मूल बिन्दु से गुजरते है और जिनके केन्द्र y – अक्ष पर स्थित है, की अवकल समीकरण है–

(A) $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ (B) $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$

(C) $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$ (D) $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

7. $\frac{2\pi}{n}$ आवर्तकाल की सभी सरल आर्वत गतियों को अवकल समीकरण है–

(A) $\frac{d^2x}{dt^2} + nx = 0$ (B) $\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$ (C) $\frac{d^2x}{dt^2} - n^2x = 0$ (D) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{n^2}x = 0.$

8. $\frac{dy}{dx} = 2^{y-x}$ का हल है–

(A) $\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} = k$ (B) $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} = k$ (C) $2^x + 2^y = k$ (D) $2^x - 2^y =$

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

9. अवकल समीकरण $2x\frac{dy}{dx} - y = 3$ का हल निरूपित करता है–

(A) वृत्त (B) सरल रेखाऐं (C) दीर्घवृत्त (D) परवलय

10. अवकल समीकरण $\sqrt{a+x}\frac{dy}{dx} + xy = 0$ का हल है–

(A) $y = Ae^{\frac{2}{3}(2a-x)\sqrt{x+a}}$ (B) $y = Ae^{-\frac{2}{3}(a-x)\sqrt{x+a}}$

(C) $y = Ae^{\frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x+a}}$ (D) $y = Ae^{-\frac{2}{3}(2a-x)\sqrt{x+a}}$

जहाँ A स्वेच्छा नियतांक है।

11. अवकल समीकरण $\tan y.\sec^2 x\,dx + \tan x.\sec^2 y\,dy = 0$ का हल है–

(A) $\tan x + \tan y = k$ (B) $\tan x - \tan y = k$

(C) $\frac{\tan x}{\tan y} = k$ (D) $\tan x.\tan y = k$

12. समीकरण $(e^y + 1)\cos x.dx + e^y \sin x\,dy = 0$ का व्यापक हल है–

(A) $(e^y + 1)\cos x = C$ (B) $(e^y - 1)\sin x = C$

(C) $(e^y + 1)\sin x = C$ (D) इनमें से कोई नहीं।

13. अवकल समीकरण $(x+y)dy - (x-y)dx = 0$ हल है–

(A) $y^2 + 2xy + x^2 = k$ (B) $y^2 + 2xy - x^2 = k$

(C) $y^2 + 2xy + x^2 = 0$ (D) $y^2 - 2xy + x^2 = k$

14. एक वक्र अवकल समीकरण $y_2(x^2+1) = 2xy_1$ को संतुष्ट करता है, बिन्दु (0,1) से गजरता है और $x = 0$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 3 है। तो वक्र का समीकरण है–

(A) $y = x^2 + 3x + 2$ (B) $y^2 = x^2 + 3x + 1$ (C) $y = x^3 + 3x + 1$ (D) इनमें से कोई नहीं।

एक या अधिक सही विकल्प

15. वक्र जिसके लिए किसी स्पर्श रेखा की प्रारम्भिव कोटि ($y-$ अन्तः खण्ड) संगत अधोः लम्ब के बराबर है, की अवकल समीकरण

(A) रैखिक है। (B) समघात है

(C) पृथक चर रखती है (D) इनमें से कोई नहीं।

16. $\left(\frac{dy}{dx}\right)(x^2y^3 + xy) = 1$ का हल है–

(A) $1/x = 2 - y^2 + Ce^{-y^2/2}$

(B) एक ऐसा समीकरण है जो रैखिक समीकरण में परिवर्तित होने योग्य है।

(C) $2/x = 1 - y^2 + e^{-y/2}$

(D) $\frac{1-2x}{x} = -y^2 + Ce^{-y^2/2}$

मिलान कीजिए –

17. **स्तम्भ – I** **स्तम्भव – II**

(A) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{2/3} - 3\frac{d^2y}{dx^2 +}\frac{5dy}{dx} = 4$ की घात है– (q) 1

(B) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = \lambda(x\sqrt{1+y^2} - y\sqrt{1+x^2})$ को संतुष्ट करने वाली अवकल समीकरण की घात है– (q) 2

(C) अवकल समीकरण $y\frac{dy}{dx}+x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+xy=\cos x$ की कोटि है– (r) 3

(D) $y=\frac{ax}{bx+c}$ की कोटि जहां a,b,c स्वेच्छ अचर है (s) इनमें से कोई नहीं

18. निम्नलिखित के अवकल समीकरण है।

स्तम्भ –I		**स्तम्भ –**	
(A)	$y=x\sin(mx+b)$ जहां a,b एवं m प्राचल है।	(q)	$y_3=y_1$
(B)	$y=ax^2+bx+c$	(q)	$y_3=0$
(C)	$y=Ae^x+Be^{-x}+C$	(r)	$y_3y=y_1y_2$
(D)	$y=A^3+A^2+Ax$	(s)	$y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\left(\frac{dy}{dx}\right)$

19. निम्नलिति के हल है–

स्तम्भ –I		**स्तम्भ –**	
(A)	$(\sin x+\cos x)dy+(\cos x-\sin x)dx=0$	(p)	$\sec y+\tan y=c(\cos ec\,x+\cot x)$
(B)	$\sin x\,dy+\cos y\,dx=0$	(q)	$2(x^2+y^2)+2(x\sin 2x+y\sin 2y)$
(C)	$x^{-1}\cos^2 y\,dy+y^{-1}\cos^2 x\,dx=0$	(r)	$y=c-\log\lvert\sin x+\cos x\rvert$
(D)	$\tan x\sec^2 y\,dy+\tan y\sec^2 x\,dy=dx$	(s)	$\tan x\tan y=x+c$

EXRECISE # 2(विषयात्मक प्रश्न)

1. अवकल समीकरण $dy/dx=\sin(10x+gy)$ को संतुष्ट करने वाले और मूलबिन्दू से गुजरने वाले वक्र $y=f(x)$ का समीकरण ज्ञात कीजिए।
2. मूल बिन्दु से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इसके किसी बिन्दु पर अभिलम्ब के $x-$अक्ष और बिन्दु के बीच भाग का मध्य बिन्दु परवलमय $2y^2=x$ पर स्थित है।
3. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$
4. $y^2=a-x$ का उपयोग करके समीकरण $y^3\frac{dy}{dx}+x+y^2=0$ को समघात बनाकर इसका हल ज्ञात कीजिए (जहां a एक चर है)
5. अवकल समीकरण $y\cos\frac{y}{x}(xdy-ydx)+x\sin\frac{y}{x}(xdy+ydx)=0$ को को हल कीजिए जब $y(1)=\frac{\pi}{2}$ हो।
6. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}-y\ell n2=2^{\sin x}(\cos x-1)\ell n2$ जब $x\to+\infty$ तो y परिबद्ध है।
7. अवकल समीकरण $\cos^2 x(dy/dx)-(\tan 2x)y=\cos^4 x,|x|<\frac{\pi}{4}$ को हल कीजिए जब $y(\pi/6)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$
8. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)y=\frac{1}{(1+x^2)^2}$; दिया गया है $y=0$ जब $x=1$
9. अवकल समीकरण $(x^2+4y^2+4xy)dy=(2x+4y+1)dx$ को हल कीजिए।
10. उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से गुजरता है तथा वक्र के प्रत्येक बिन्दु (x,y) पर प्रवणता $\frac{x^4+2xy-1}{1+x^2}$ है।
11. प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $(1x^2)\frac{dy}{dx}+xy=ax$ के समाकल वक्र दीर्घवृत्त एवं अतिपरवलय है जिनके केन्द्र $(0,a)$ तथा अक्ष, निर्देशी अक्षों के समान्तर है तथा प्रत्येक वक्र का एक नियत अक्ष है जिसकी लम्बाई 2 है।

12. वह वक्र ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2,0) से इस प्रकार गुजरता है कि स्पर्श बिन्दु और $y-$अक्ष के मध्य रेखाखण्ड की लम्बाई 2 इकाई है।

13. एक वक्र $y=f(x)$ बिन्दु $P(1,1)$ से गुजरता है। बिन्दु P पर वक्र का अभिलम्ब $a(y-1)+(x-1)=0$ यदि वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिन्दु की कोटि के समानुपाती है तो वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए। बिन्दु P पर अभिलम्ब, $y-$अक्ष और वक्र द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

14. A व B दो अलग–अलग जल कुण्ड हैं। कुण्ड A की क्षमता B की क्षमता की दुगुनी है। दोनों कुण्ड जल से पूर्णतया भरे जाते है। उनके जल आने के रास्ते बन्द कर दिये जाते है। अब दोनों कुण्डों से जल एक साथ छोड़ा जाता है। प्रत्येक कुण्ड A से किसी क्षण जल के बाहर आने की दर उस समय कुण्ड B में जल की मात्रा की 1.5 गुनी है। कितने घण्टे बाद दोनों कुण्डों में जल की मात्रा समान होगी ?

15. यदि वक्र $y=f(x)$ बिन्दु $(4,-2)$ से गुजरता है तो तथा अवकल समीकरण $y(x+y^3)dx=x(y^3-x)dy$ को संतुष्ट करता है एवं यदि
$y=9(x)=\int_{1/8}^{\sin^2 x}\sin^{-1}\sqrt{t}\,dt+\int_{1/8}^{\cos^2 x}\cos^{-1}\sqrt{1}\,dt, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$ हो तो वक्रों $y=f(x), y=g(x)$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Answers

EXERCISE #1

1. B 2. C 3. A 4. A 5. B 6. A 7. B

8. A 9. D 10. A 11. D 12. C 13. B 14. C

15. AB 16. ABD

17. (A) $\to$ (q), (B) $\to$ (p), (C) $\to$ (q), (D) $\to$ (q)

18. (A) $\to$ (r), (B) $\to$ (q), (C) $\to$ (p), (D) $\to$ (s)

19. (A) $\to$ (r), (B) $\to$ (p), (C) $\to$ (q), (D) $\to$ (s)

EXERCISE # 2

1. $y=\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan 4x}{4-3\tan 4x}\right)-\frac{5x}{3}$

2. $y^2=2x+1-e^{2x}$

3. $c(xiy)^{2/3}(x^2+xy+y^2)^{1/6}=\exp\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+2y}{x\sqrt{3}}\right]$

4. $\frac{1}{2}\ell n\left|x^2+x^2\right|-\tan^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)=c$ where, $a=x+y^2$

5. $xy\sin(y/x)=\pi/2$ 6. $y=2^{\sin x}$

7. $y=(1/2)\tan 2x.\cos^2 x$

8. $y(1+x^2)=\tan^{-1}x-\frac{\pi}{4}$

9. $y=\ell n((x+2y)^2+4(x+2y)+2)$

10. $y=(x-2\tan^{-1}x)(1+x^2)$

12. $y=\pm\left[\sqrt{4-x^2}+2\ell n\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right]$

13. $e^{a(x-1)}, \frac{1}{a}\left[a-\frac{1}{2}+e^{-a}\right]$ sq.unit

14. $T=\log_{4/3}2$ hrs from the start 5. $\frac{1}{8}\left(\frac{3\pi}{16}\right)^4$